II ÉNONCES ET ANALYSE DES ÉPREUVES ECRITES

1. Énoncé de la première épreuve (mathématiques)

Exercice 1

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On note :

- $\boldsymbol{i}$ le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$;
- $\boldsymbol{j}$ le nombre complexe $\boldsymbol{j} = \cos\frac{2\pi}{3} + \boldsymbol{i}\sin\frac{2\pi}{3}$;
- $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe z.

Partie 1: *Préliminaire.*

1. Démontrer que : $\boldsymbol{j}^2 = \bar{\boldsymbol{j}}$, $\boldsymbol{j}^3 = 1$ et **Erreur ! Signet non défini.**.

2. Dans le plan $\mathcal{P}$ placer les points d'affixes $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{j}^2$, $-\boldsymbol{j}$ et $-\boldsymbol{j}^2$.

3. Quels sont les arguments des nombres complexes $-\boldsymbol{j}$ et $-\boldsymbol{j}^2$?

Partie 2: *Caractérisations des triangles équilatéraux.*

Dans le plan $\mathcal{P}$ on considère les points M, N et P deux à deux distincts et l'on note m, n et p leurs affixes respectives.

1. a) Démontrer que le triangle MNP est équilatéral si et seulement si les nombres complexes m, n et p vérifient l'une des deux relations suivantes :

$$\frac{p-m}{n-m} = \cos\frac{\pi}{3} + \boldsymbol{i}\sin\frac{\pi}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{p-m}{n-m} = \cos\frac{\pi}{3} - \boldsymbol{i}\sin\frac{\pi}{3}.$$

b) En déduire que le triangle MNP est équilatéral si et seulement si les nombres complexes m, n et p vérifient l'une des deux relations suivantes :

$$\frac{p-m}{n-m} = -\boldsymbol{j}^2 \quad \text{ou} \quad \frac{p-m}{n-m} = -\boldsymbol{j}$$

2. Déduire de la question **1.** ci-dessus que :

a) Le triangle MNP est équilatéral si et seulement si : $m^2 + n^2 + p^2 = mn + np + pm$.

b) Le triangle MNP est équilatéral si et seulement si : $m + n\boldsymbol{j} + p\boldsymbol{j}^2 = 0$ ou $m\boldsymbol{j}^2 + n\boldsymbol{j} + p = 0$.

Partie 3: *Trois triangles équilatéraux associés à un même triangle.*

A- *Etude de la configuration.*

Dans le plan $\mathcal{P}$ on considère un triangle direct ABC et l'on note a, b et c les affixes respectives des points A, B et C. On construit les triangles équilatéraux directs $BA'C$, $CB'A$ et $AC'B$. On désigne par M, N et P les centres de gravité respectifs de ces triangles, puis par M' le symétrique de M par rapport à la droite (BC), par N' le symétrique de N par rapport à la droite (CA) et par P' le symétrique de P par rapport à la droite (AB).

1. Exprimer en fonction de a, b, c et $\boldsymbol{j}$ les affixes respectives des points M, N et P, puis des points M', N' et P'.

2. Démontrer, en utilisant les résultats de la **partie 2**, que les triangles MNP et $M'N'P'$ sont équilatéraux .

3. Démontrer que les triangles MNP, $M'N'P'$ et ABC ont le même centre de gravité.

B- *Une relation entre les aires.*

On appelle $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$ et $\mathcal{A}$ les aires respectives des triangles *MNP*, *M'N'P'* et *ABC*.

1. Démontrer que $\mathcal{S} = \frac{\sqrt{3}}{12} \left| a + bj^2 + cj \right|^2$ et que $\mathcal{S}' = \frac{\sqrt{3}}{12} \left| a + bj + cj^2 \right|^2$.

2. On considère que le plan complexe ✓ est inclus dans l'espace euclidien & muni du repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v},\vec{w})$. Exprimer en fonction de *a, b* et *c* les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ dans ce repère. En déduire l'expression de l'aire $\mathcal{A}$.

3. Démontrer que $\mathcal{A} = \left| \mathcal{S} - \mathcal{S}' \right|$.

Exercice 2

Partie 1 : préliminaire.

On note Arc tan la fonction réciproque de la restriction de la fonction tangente à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

1. Quel est le domaine de définition de la fonction (Arc tan) ?
2. Démontrer qu'elle est dérivable et que sa fonction dérivée est définie par : (Arc tan)'(x) $= \frac{1}{x^2+1}$

Partie 2 : étude d'une famille de fonctions

Soit *a* un réel.

On considère les fonctions f_a définies sur ℝ par :

$$f_a(x) = (x + a) \text{ Arc tan } x,$$

représentées par les courbes C_a dans un repère orthonormé.

1. Montrer que quelque soit le réel *x* on a : $f_a(-x) = f_{-a}(x)$. Que peut-on en déduire pour les courbes C_a et C_{-a} ?

On suppose désormais que *a* est un réel positif ou nul.

2. Étudier les variations de f_a (on calculera les dérivées première et seconde et on montrera que l'équation $f_a'(x) = 0$ admet une seule solution).

2. a) Montrer que Arc tan *x* + Arc tan $(\frac{1}{x})$ est égal à $\frac{\pi}{2}$ pour *x* dans $\mathbb{R}_+^*$ et $-\frac{\pi}{2}$ pour *x* dans $\mathbb{R}_-^*$.

   b) Montrer que la droite D_1 d'équation $y = \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}a - 1$ est asymptote à la courbe C_a (on pourra utiliser un développement limité au voisinage de 0 de Arc tan *t*).

   c) Montrer que la courbe C_a possède une seconde asymptote D_2.

4. Représenter les courbes C_0 et C_1 ainsi que leurs asymptotes.

Partie 3 : étude d'une fonction définie par une intégrale.

Soit la fonction φ définie par : $\varphi(x) = \int_x^{x+1} f_0(t)dt$.

1. Justifier que φ est définie sur ℝ. Calculer $\varphi(0)$.
2. Montrer que pour tout réel *x* on a : $\varphi'(x) = f_0(x+1) - f_0(x)$. Vérifier que $\varphi'(-0{,}5) = 0$.
3. Dans le repère orthonormé de la **partie 2**, représenter la fonction *g* définie sur ℝ par $g(x) = f_0(x+1)$.

   En déduire graphiquement le signe de $\varphi'(x)$ et les variations de φ.

4 . Montrer qu'il existe des nombres réels m , b et une fonction r (que l'on n'explicitera pas) tels que sur $\mathbb{R}_+^*$ $f_0(x) = m\,x + b + \dfrac{r(x)}{x}$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} r(x) = 0$.

Montrer ensuite qu'il existe des nombres réels α , β et une fonction ρ (que l'on n'explicitera pas) tels que sur $\mathbb{R}_+^*$ $\varphi(x) = \alpha x + \beta + \dfrac{\rho(x)}{x}$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} \rho(x) = 0$.

En déduire que la courbe (Γ) représentant la fonction φ dans un repère orthonormé admet une asymptote Δ_1.

5. Montrer que la courbe (Γ) admet une seconde asymptote Δ_2.
6. Sur une nouvelle figure tracer les droites Δ_1, Δ_2 et la courbe (Γ).

Partie 4 : résolution d'une équation différentielle.

On considère l'équation différentielle (E) : $(\text{Arc tan } x)\, y' - \left(\dfrac{1}{x^2+1}\right) y = (\text{Arc tan } x)^2$.

1. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.
2. Existe-t-il des solutions sur $\mathbb{R}$? Dans l'affirmative, préciser ces solutions .

2. corrigé de la première épreuve (mathématiques)

EXERCICE I

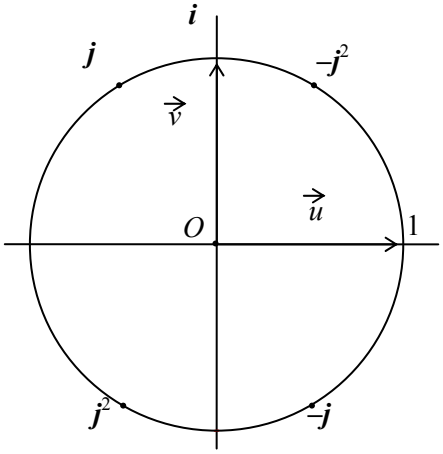
Partie 1 préliminaire

1- Démontrer que : $j^2 = \bar{j}$, $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$.

$j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, $\dfrac{4\pi}{3} = -\dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$, donc $j^2 = \bar{j}$, $j^3 = e^{2i\pi} = 1$.

$j^3 = 1 \Leftrightarrow j^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow (j-1)(j^2 + j + 1) = 0 \underset{j\neq 1}{\Leftrightarrow} j^2 + j + 1 = 0$

2- Dans le plan $\mathcal{P}$ placer les points d'affixes j, j^2, $-j$ et $-j^2$.



3- Quel sont les arguments des complexes $-j$ et $-j^2$?

$\arg(-j) = \arg(j) + \pi\ [2\pi]$ d'où $\arg(-j) = \dfrac{5\pi}{3}\ [2\pi]$.

$\arg(-j^2) = \arg(j^2) + \pi\ [2\pi]$ d'où $\arg(-j^2) = \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Partie 2 Caractérisations des triangles équilatéraux.

1- a) Le triangle MNP est équilatéral si et seulement si P est l'image de n dans la rotation de centre M et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ ou la rotation de centre M et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$

MNP équilatéral $\Leftrightarrow p - m = e^{i\frac{\pi}{3}}(n-m)$ ou $p - m = e^{-i\frac{\pi}{3}}(n-m)$

d'où $\boxed{\dfrac{p-m}{n-m} = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}}$ ou $\boxed{\dfrac{p-m}{n-m} = \cos\dfrac{\pi}{3} - i\sin\dfrac{\pi}{3}}$.

- b) comme $\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3} = -j^2$ et $\cos\dfrac{\pi}{3} - i\sin\dfrac{\pi}{3} = -j$ on peut écrire

MNP équilatéral $\Leftrightarrow \dfrac{p-m}{n-m} = -j^2$ ou $\dfrac{p-m}{n-m} = -j$

2- a)

MNP est équilatéral si $\frac{p-m}{n-m}=\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$, ce qui équivaut à : $(\frac{p-m}{n-m}-\frac{1}{2})^2=(\pm i\frac{\sqrt{3}}{2})^2$

soit : $p^2+m^2+n^2=pm+pn+mn$

2- b)

MNP est équilatéral ssi $\frac{p-m}{n-m}=-j$ ou $\frac{p-m}{n-m}=-j^2$, ce qui équivaut à : $p-m(1+j)+jn=0$ ou $p-m(1+j^2)+j^2n=0$

$p+mj^2+nj=0$ ou $p+mj+nj^2=0$ (car $1+j+j^2=0$)

$p+mj^2+nj=0$ ou $pj^2+m+nj=0$ (car $j^3=1, j^4=j$)

Partie 3 Trois triangles équilatéraux associés à un même triangle.

A- Étude de configuration.

1- Exprimer les affixes respectives des points *M, N* et *P,* puis des points *M′, N′* et *P′.*

Le point *B* est l'image du point *C* dans la rotation de centre *M* et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ d'où $b-m=\boldsymbol{j}(c-m)$ soit

$\boxed{m=\frac{b-\boldsymbol{j}c}{1-\boldsymbol{j}}}$; de même $\boxed{n=\frac{c-\boldsymbol{j}a}{1-\boldsymbol{j}}}$ et $\boxed{p=\frac{a-\boldsymbol{j}b}{1-\boldsymbol{j}}}$.

Le point *C* est l'image du point *B* dans la rotation de centre *M′* et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ conduit à :

$\boxed{m'=\frac{c-\boldsymbol{j}b}{1-\boldsymbol{j}}}$; de même $\boxed{n'=\frac{a-\boldsymbol{j}c}{1-\boldsymbol{j}}}$ et $\boxed{p'=\frac{b-\boldsymbol{j}a}{1-\boldsymbol{j}}}$.

2- Démontrer que les triangles *MNP* et *M′N′P′* sont équilatéraux

$m+nj+pj^2=\frac{1}{3}(b(1-j^2+j^2-j^3)+c(1-j+j-j^3)+a(j-j^2+j^2-j^4))$

$m+nj+pj^2=0$ donc le triangle *MNP* est équilatéral.

$m'j^2+n'j+p'=\frac{1}{3}(b(2j^2+j^4+2+j)+c(2j^2+j^3+2j+j^3)+a(2j+j^2+2+j^2))$

$m'j^2+n'j+p'=0$ donc le triangle *M′N′P′* est équilatéral.

3- Démontrer que les triangles *MNP* , *M′N′P′* et *ABC* ont le même centre de gravité.

$\frac{1}{3}(m+n+p)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{1-\boldsymbol{j}}(b-\boldsymbol{j}c+c-\boldsymbol{j}a+a-\boldsymbol{j}b)=\frac{1}{3}(a+b+c)$

$\frac{1}{3}(m'+n'+p')=\frac{1}{3}\times\frac{1}{1-\boldsymbol{j}}(c-\boldsymbol{j}b+a-\boldsymbol{j}c+c-\boldsymbol{j}c)=\frac{1}{3}(a+b+c)$.

Donc les triangles *MNP* , *M′N′P′* et *ABC* ont le même centre de gravité.

B- Une relation entre les aires

On appelle S, S ' et A les aires respectives des triangles *MNP* , *M′N′P′* et *ABC*.

1-

MNP est un triangle équilatéral de côté *NP* = |*p*-*n*| et de hauteur $NP\times\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Son aire est donc S = $\frac{\sqrt{3}}{4}|p-n|^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\left|\frac{1}{3}(a(1-j^2-1+j)+b(1-j)-c(1-j^2))\right|^2$

S = $\frac{\sqrt{3}}{36}\times|j(1-j)|^2\times|a+bj^2+cj|^2$ Or $|j|=1$ et $|1-j|=\sqrt{3}$, donc S = $\frac{\sqrt{3}}{12}|a+bj^2+cj|^2$

De même, S ' = $\frac{\sqrt{3}}{4}\left|p'-n'\right|^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left|\frac{1}{3}(a(2+j^2-2-j)+b(2+j)-c(2+j^2))\right|^2$

S ' = $\frac{\sqrt{3}}{36}\times\left|1+2j^2\right|^2\times\left|a+bj+cj^2\right|^2$ et $\left|1+2j^2\right|=\sqrt{3}$, et S ' = $\frac{\sqrt{3}}{12}\left|a+bj+cj^2\right|^2$

2-

Si A a pour affixe a dans le plan, ses coordonnées dans l'espace sont $(\frac{a+\overline{a}}{2},\frac{a-\overline{a}}{2i},0)$ et celles du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(\frac{b-a+\overline{b-a}}{2},\frac{b-a-\overline{b-a}}{2i},0)$. $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ a donc pour coordonnées $(0,0,z)$ avec

$$z=\frac{b-a+\overline{b-a}}{2}\times\frac{c-a-\overline{c-a}}{2i}-\frac{b-a-\overline{b-a}}{2i}\times\frac{c-a+\overline{c-a}}{2}=\frac{(\overline{b-a})(c-a)-(b-a)(\overline{c-a})}{2i}$$

$A=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$ donc $A=\frac{1}{4}\left|(\overline{b-a})(c-a)-(b-a)(\overline{c-a})\right|$

3- Démontrer que et A = |S – S '|

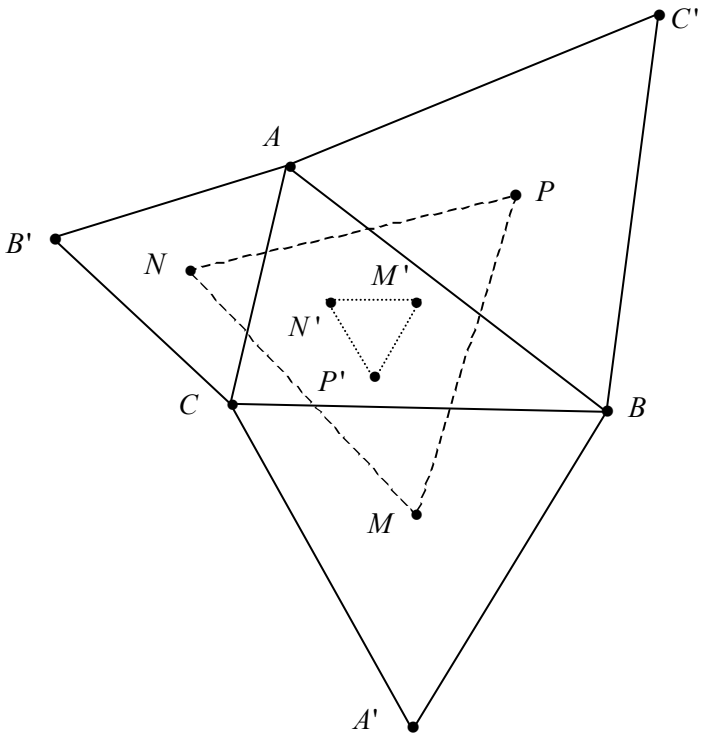
S = $\frac{\sqrt{3}}{12}\left|a+bj^2+cj\right|^2 = \frac{\sqrt{3}}{12}(a+bj^2+cj)(\overline{a+bj^2+cj}) = \frac{\sqrt{3}}{12}(a+bj^2+cj)(\overline{a}+\overline{b}j+\overline{c}j^2)$

De même, S ' = $\frac{\sqrt{3}}{12}(a+bj+cj^2)(\overline{a}+\overline{b}j^2+\overline{c}j)$

S – S ' = $\frac{\sqrt{3}}{12}[(a+bj^2+cj)(\overline{a}+\overline{b}j+\overline{c}j^2)-(a+bj+cj^2)(\overline{a}+\overline{b}j^2+\overline{c}j)]$

S – S ' = $\frac{\sqrt{3}}{12}(j-j^2)(a\overline{b}-a\overline{c}-b\overline{a}+b\overline{c}+c\overline{a}-c\overline{b})$ et comme $\left|j-j^2\right|=\sqrt{3}$,

|S – S '| = $\frac{1}{4}\left|(\overline{b-a})(c-a)-(b-a)(\overline{c-a})\right| = A$



EXERCICE II

Partie 1 : préliminaire.

1) La fonction tangente est une bijection (continue strictement croissante) de $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction Arc tan est définie (continue strictement croissante) sur $\mathbb{R}$.

2) La fonction tangente est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ et sa dérivée ne s'annule pas. Donc sa réciproque est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus :

$$\left(\operatorname{Arc}\tan\right)'(x)=\frac{1}{(\tan)'\left(\operatorname{Arc}\tan(x)\right)}=\frac{1}{1+(\tan)^2\left(\operatorname{Arc}\tan(x)\right)}=\frac{1}{1+x^2}$$

Partie 2 : étude d'une famille de fonctions

1)

Arctan est une fonction impaire donc

$f_a(-x)=(-x+a)\operatorname{Arc}\tan(-x)=(x-a)\operatorname{Arc}\tan(x)=f_{-a}(x)$.

Par conséquent $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in C_a \Leftrightarrow y=f_a(x)\Leftrightarrow y=f_{-a}(-x)\Leftrightarrow M'\begin{pmatrix}-x\\y\end{pmatrix}\in C_{-a}$ et les courbes C_a et C_{-a} sont symétriques par rapport à l'axe Oy.

2)

$f_a'(x)=\operatorname{Arc}\tan(x)+\frac{x+a}{1+x^2}$ et $f_a''(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{(1+x^2)-2x(x+a)}{\left(1+x^2\right)^2}=2\frac{1-ax}{\left(1+x^2\right)^2}$ ce qui permet de dresser les tableaux de variations suivants :

$a>0$

x	$-\infty$		$1/a$		$+\infty$
$f_a''(x)$		$+$	0	$-$	
$f_a'(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	↗	m_a (0)	↘	$\frac{\pi}{2}$
$f_a(x)$		↘		↗	

$a=0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f_0''(x)$		$+$	
$f_0'(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	↗ (0)	$\frac{\pi}{2}$
$f_0(x)$		↘	

Lorsque a est non nul, m_a est positif (puisque supérieur à $\frac{\pi}{2}$) et f' est une bijection strictement croissante de $]-\infty;\frac{1}{a}]$ sur $]-\frac{\pi}{2};m_a]$ donc s'annule une fois et une seule pour $x<\frac{1}{a}$, pour $x>\frac{1}{a}$ $f'(x)>\frac{\pi}{2}$. De même f_0' s'annule une fois et une seule.

3)

a) La fonction $x\mapsto\operatorname{Arc}\tan x+\operatorname{Arc}\tan\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*\cup\mathbb{R}_-^*$.

Sa dérivée est nulle $\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x^2}\times\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\right)$ donc elle est constante sur chaque intervalle.

$\operatorname{Arc}\tan(1)=\frac{\pi}{4}$ donc pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$ $\operatorname{Arc}\tan x+\operatorname{Arc}\tan\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$

$\operatorname{Arc}\tan(-1)=-\frac{\pi}{4}$ donc pour tout x de $\mathbb{R}_-^*$ $\operatorname{Arc}\tan x+\operatorname{Arc}\tan\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{\pi}{2}$

b) Le développement limité d'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction Arc tan permet d'écrire :

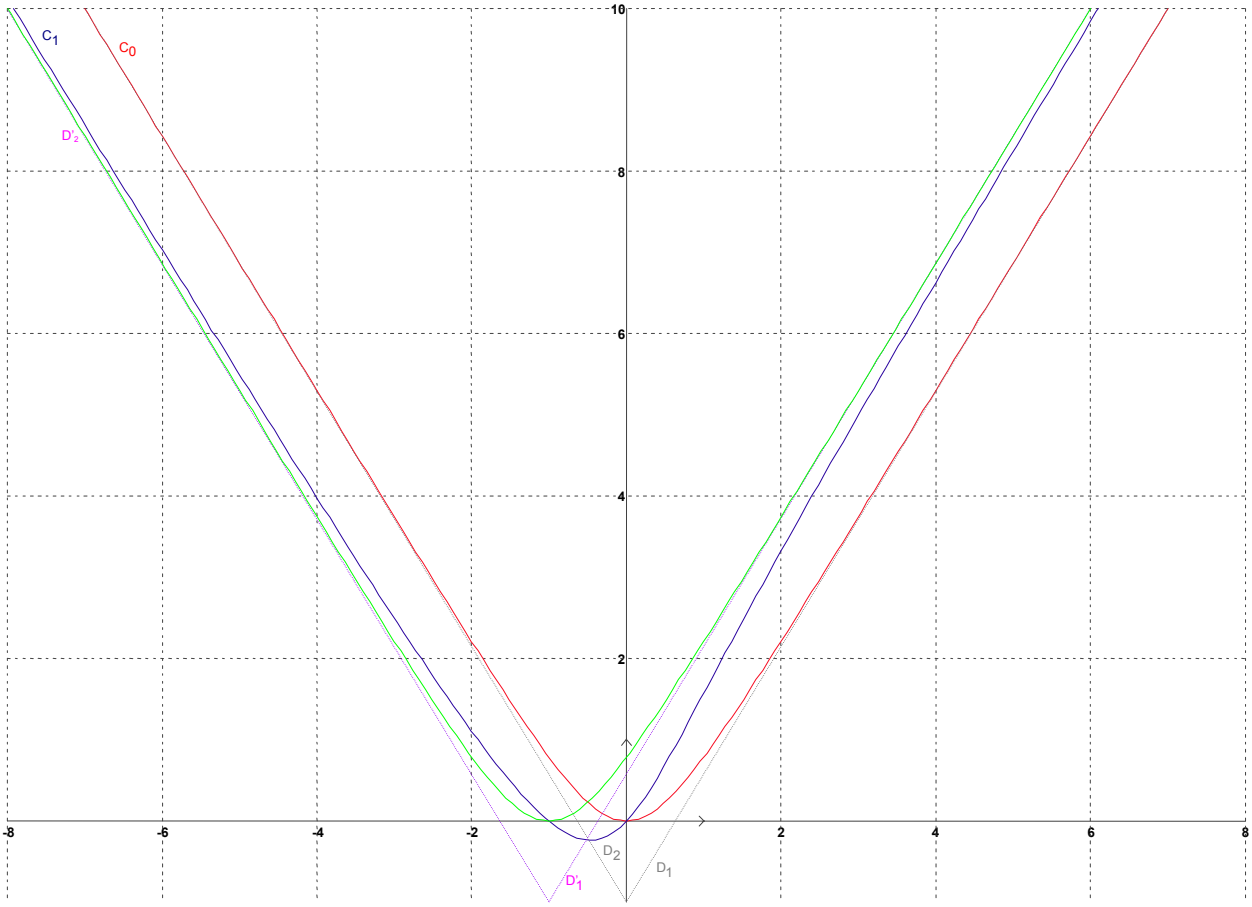
$\text{Arc}\tan(t) = t + t^2\ \varepsilon(t)$ avec $\lim_0 \varepsilon = 0$; donc pour $x>0$:

$$\text{Arc}\tan(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Arc}\tan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\ \varepsilon(\frac{1}{x})\right) \text{ avec } \lim_0 \varepsilon = 0 .$$

Par suite $f_a(x) = \frac{\pi}{2}(x+a) - \frac{x+a}{x}(1 + \frac{1}{x}\varepsilon(\frac{1}{x}))$ donc $\lim_{+\infty} f_a(x) - \left(\frac{\pi}{2}(x+a) - 1\right) = 0$ et D_1 est asymptote à C_a au voisinage de $+\infty$.

c) Comme $f_a(-x) = f_{-a}(x)$, au voisinage de $-\infty$ la droite D_2 d'équation $y = -\left(\frac{\pi}{2}(x+a)+1\right)$ est asymptote à C_a.

4)



Partie 3 : étude d'une fonction définie par une intégrale.

4. Justifier que φ est définie sur $\mathbb{R}$. Calculer $\varphi(0)$.

Pour tout réel x, f_0 est continue sur l'intervalle $[x\ x+1]$ donc intégrable donc φ est définie sur $\mathbb{R}$. $\varphi(0) = \int_0^1 x\ \text{Arc}\tan(x)\text{d}x$ en intégrant par partie on obtient :

$$\varphi(0) = \left[\frac{x^2}{2}\text{Arc}\tan(x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2(x^2+1)}\text{d}x = \left[\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\right)\text{Arc}\tan(x) - \frac{x}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

5. Montrer que pour tout réel x on a : $\varphi'(x) = f_0(x+1) - f_0(x)$. Vérifier que $\varphi'(-0{,}5) = 0$.

Si l'on note F une primitive de f_0, $\varphi'(x) = \left(F(x+1) - F(x)\right)' = f_0(x+1) - f_0(x)$. Donc, comme f_0 est paire (cf. 2.1), $\varphi'(-0{,}5) = f_0(0{,}5) - f_0(-0{,}5) = 0$.

6.

La courbe représentative de g est l'image de C_0 dans la translation de vecteur $-\vec{i}$ (en vert sur le graphique). Ceci permet de dresser le tableau de variation de φ.

x	$-\infty$		$-0,5$		∞
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	$\searrow$			$\nearrow$	

7.

Pour $x>0$ $\operatorname{Arc}\tan(x) = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\,\varepsilon(\frac{1}{x})\right)$ avec $\lim_0 \varepsilon = 0$ (cf. 2.3.b) donc $f_0(x) = \frac{\pi}{2}x - 1 + \frac{r(x)}{x}$ avec $\lim_{x\to+\infty} r(x) = 0$.

En intégrant l'égalité précédente on obtient $\varphi(x) = \int_x^{x+1}\left(\frac{\pi}{2}t - 1 + \frac{r(t)}{t}\right)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{4} - 1 + \int_x^{x+1}\frac{r(t)}{t}\mathrm{d}t$

$\left|\int_x^{x+1}\frac{r(t)}{t}\mathrm{d}t\right| \le \underset{[x\,;\,x+1]}{\mathrm{Max}}|r(t)| \times \ln(\frac{x+1}{x}) = \underset{[x\,;\,x+1]}{\mathrm{Max}}|r(t)| \times \left(\frac{1}{x} + \mathrm{o}(\frac{1}{x})\right)$ donc $\int_x^{x+1}\frac{r(t)}{t}\mathrm{d}t = \frac{\rho(x)}{x}$ avec $\lim_{+\infty}\rho = 0$

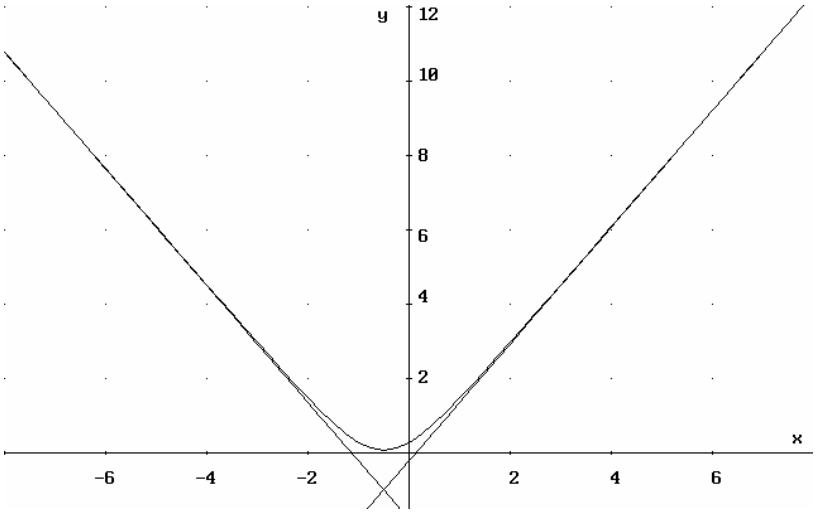
(r est continue, donc bornée sur $[x\,;\,x+1]$, puisque f_0 l'est).

La droite d'équation $y = \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{4} - 1$ est asymptote à (Γ) au voisinage de $+\infty$.

8.

Comme f_0 est paire on a $\varphi(-x) = \int_{-x}^{-x+1} f_0(t)\mathrm{d}t = \int_{x-1}^{x} f_0(u)\mathrm{d}u = \varphi(x-1)$ (avec $u = -t$). La droite d'équation $y = -\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{4} - 1$ est asymptote à (Γ) au voisinage de $-\infty$.

9.



Partie 4 : résolution d'une équation différentielle.

1. Pour tout x différent de 0, l'équation (E) peut s'écrire :

$$\frac{Arc\tan(x).y' - (Arc\tan(x))'.y}{(Arc\tan(x))^2} = \left(\frac{y}{Arc\tan(x)}\right)' = 1$$

Elle admet donc comme solution sur $\mathbb{R}_+^*$ ou sur $\mathbb{R}_-^*$ les restrictions des fonctions f_a.

2. Les fonctions f_a sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifient l'équation (E) pour tout réel.